OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

lundi 5 mai 1997, de 8 h à 12 h

EXERCICE I

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que -1 est une valeur propre de A et trouver un vecteur propre, noté V, associé à cette valeur propre.

b) Montrer que (V, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans cette base.

c) Montrer que si X est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, alors $f(X)$ est une combinaison linéaire de X et de V. En déduire que, dans toute base de $\mathbb{R}^3$ de la forme (V, V_2, V_3), où V_2 et V_3 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Plus généralement, soit U_1 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant la propriété suivante :

(P) Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, $h(X)$ est une combinaison linéaire de X et de U_1.

Soit (U_1, U_2, U_3) une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en adjoignant à U_1 deux autres vecteurs U_2 et U_3.

a) En appliquant la propriété (P) à trois vecteurs particuliers, montrer qu'il existe des réels α, β, γ tels que

$$h(U_2) = \alpha U_1 + \gamma U_2 \quad \text{et} \quad h(U_3) = \beta U_1 + \gamma U_3.$$

b) En déduire que la matrice de h dans la base (U_1, U_2, U_3) est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où α, β, γ et λ sont des réels.

c) L'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

EXERCICE II

1. Montrer que, si g est une fonction réelle définie sur $[0,1]$, continue et positive sur cet intervalle, la fonction h, définie par $h(x) = 2\int_0^x \sqrt{g(t)}\,dt$, est aussi une fonction continue et positive sur $[0,1]$.
2. Compte tenu du résultat précédent, on définit sur $[0,1]$ une suite de fonctions réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_0(x) = 1,$$

$$\text{et pour tout } n \geq 1, \quad f_n(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_{n-1}(t)}\,dt.$$

Calculer f_1, f_2 et f_3.

3. Montrer qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [0,1]$, on ait

$$f_n(x) = a_n x^{b_n}$$

On calculera b_n en fonction de n et on écrira une relation de récurrence donnant a_n en fonction de a_{n-1}.

4. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $2^n \ln(a_n) = -\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln(1-2^{-k})$.

5. a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$0 \leq -\ln(1-x) - x \leq \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x}$$

b) En déduire que, pour tout $k \geq 1$,

$$\left|-2^k \ln\left(1-2^{-k}\right) - 1\right| \leq 2^{-k}.$$

c) Montrer que $\ln(a_n)$ est équivalent à $\dfrac{n}{2^n}$ quand n tend vers l'infini.

6. Montrer que, pour tout réel $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite en fonction de x.

EXERCICE III

Un pion est déplacé de manière aléatoire sur un damier de quatre cases numérotées de 1 à 4. On considère une suite de variables aléatoires, $(X_n)_{n\geq 0}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3,4\}$, représentant la position du pion aux instants successifs : pour $i \in \{1,2,3,4\}$, on a $X_n = i$ si le pion est sur la case i à l'instant n.
On note π_{ij} l'élément situé à la i-ème ligne et à la j-ième colonne de la matrice

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour i et j dans $\{1,2,3,4\}$ on suppose que, pour tout $n \geq 0$ tel que $P(X_n = i) \neq 0$, la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = j \ / \ X_n = i)$ (probabilité que le pion soit sur la case j à l'instant $n+1$ sachant qu'il est sur la case i à l'instant n) est égale à π_{ij}.
On note, pour tout $n \geq 0$,

$$p_n = P(X_n = 1), \quad q_n = P(X_n = 2), \quad r_n = P(X_n = 3), \quad s_n = P(X_n = 4).$$

Enfin on suppose que le pion est sur la case 1 à l'instant $n = 0$ et donc que $p_0 = 1$. Si le pion vient sur la case 4 à l'instant $n > 0$, il y reste à l'instant $n+1$, d'où la quatrième ligne de la matrice Π.

1. Calculer p_1, q_1, r_1, s_1 et p_2, q_2, r_2, s_2.

2. **a)** Donner, pour tout entier $n \geq 0$, l'expression de p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}, s_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n, s_n.
   b) En déduire, pour $n \geq 1$, les expressions de p_n, q_n, r_n et s_n en fonction de n.

3. **a)** Calculer, pour $n \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = 4 \ / \ X_n \neq 4)$.
   b) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la probabilité que le pion passe par la case 4, pour la première fois, à l'instant n. On notera t_n cette probabilité.
   c) Déterminer la probabilité qu'il ne passe jamais par la case 4.
   d) Soit T une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et vérifiant, pour tout entier $n \geq 1$, $P(T = n) = t_n$. Calculer l'espérance et la variance de T.

4. Calculer la probabilité que le pion ne passe jamais ni par la case 2 ni par la case 3.

5. **a)** Déterminer la probabilité que le pion se soit trouvé sur la case 1 à l'instant $n = 1$, sachant qu'il est sur la case 4 à l'instant $n = 2$.
   b) Plus généralement, soit m et n deux entiers vérifiant $0 < m < n$. Déterminer la probabilité que le pion se soit trouvé sur la case 1 à l'instant m, sachant qu'il est sur la case 4 à l'instant n.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail